MÉTHODOLOGIE III

SÉRIES.

L'objectif de ce travail est de passer en revue l'ensemble des méthodes qui permettent d'étudier la convergence des séries.

Soit donc $\sum u_n$ une série. On note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}$ la suite des sommes partielles.

Exercice 1.- ***Préliminaires.***
Réécrire la fiche-méthode suivante en conservant les parties **en gras**, en effaçant le reste puis en complétant par les parties du cours, des exercices et du TD appropriées.

Partie I : méthodes dérivées de l'étude des suites.

Méthode 0 : La série ne peut pas converger si son terme général ne tend pas vers 0.

Méthode 1 : Étudier directement la suite $(\mathbf{S_n})_\mathbf{n}$.

Rappeler ce qu'est une série télescopique et comment exprimer S_n dans ce cas.

Exprimer S_n dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Dans quels cas y a-t-il convergence/divergence de la série ?

Rappeler les formules pour la somme des séries géométriques dérivées.

Qu'est-ce que la série exponentielle ?

Méthode 2 : Reconnaître une série "de référence".

En plus des séries précédentes, il y a une autre famille de séries de référence : les séries de Riemann.

Rappeler dans quels cas convergent les séries de Riemann.

Partie II : méthodes pour étudier les séries à termes positifs et pour prouver l'absolue convergence des séries quelconques.

Méthode 3 : Majorer le terme général par le terme général d'une série de référence.

Citer le résultat du cours qui donne la convergence de la série majorée.

Méthode 4 : Obtenir un équivalent du terme général.

Qu'en déduit on sur les séries ?

Méthode 5 : Appliquer la règle du $\mathbf{n^\alpha u_n}$.

Rappeler la mise en œuvre de cette règle.

Méthode 6 : Comparer la série à une intégrale.

Quel résultat du cours utilise-t-on ?

Partie III : méthodes pour prouver la simple convergence.

Méthode 7 : Utiliser le théorème des séries alternées.

Rappeler le résultat (voir feuille d'exercices).

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

Exercice 2.- *Applications.*
Montrer la convergence ou la divergence des séries suivantes (on donne le terme général). Préciser la méthode utilisée dans chacun des cas.

1. $u_n = (\ln n)^{-\ln n}$.

2. $u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n - \ln n}$.

3. $u_n = \frac{\ln\left(1+n^\beta x^n\right)}{n^\alpha}$ pour $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

4. $u_n = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{n^\beta}$ avec $\beta > 0$.

5. $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha + n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ (difficile).

6. $u_n = \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$ (calculer la somme).

7. $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$ (calculer la somme).

Attention, tous les cas présentés ici sont assez difficiles.

Exercice 3.- ***ESSEC 1990*** *Partie I.* **1.** On considère la fonction définie pour tout réel positif x par

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2(1+x)} - \ln(1+x).$$

a. Calculer $f'(x)$, étudier f et tracer sa courbe représentative.

b. En déduire successivement que

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{x^2}{2} \quad \text{puis} \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

2. Soit n, k et p des entiers naturels non nuls tels que $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$.

a. À l'aide du théorème des accroissements finis, établir que

$$\frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{2k^2}.$$

b. Déduire des résultats précédents l'inégalité suivante :

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} f\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{12(n-1)^2}.$$

3. On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

À cet effet, on introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

a. Établir l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

b. En déduire le sens de variation des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et prouver qu'elles sont adjacentes.

4. On note γ la limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et pour évaluer numériquement γ, on se propose d'étudier la moyenne arithmétique m_n de u_n et v_n :

$$m_n = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

a. Prouver l'inégalité suivante :

$$|m_n - \gamma| \leqslant \frac{1}{2n}.$$

b. Écrire en Python un algorithme permettant de calculer m_n pour un entier naturel non nul n donné. Préciser en particulier m_5 et m_{50} et en déduire des valeurs approchées de γ à 0,1 et 0,01 près. Que constate-t-on a posteriori sur la qualité de l'approximation réalisée par m_5

5. On améliore dans cette question la majoration obtenue pour $|m_n - \gamma|$ à l'aide de l'ensemble des résultats précédents.

a. Comparer $f\left(\frac{1}{k}\right)$ et $m_{k+1} - m_k$

b. Déduire de l'inégalité de la question **2.b.** que, si n et p sont deux entiers naturels non nuls tels que $n \geqslant 2$, alors on a

$$0 \leqslant m_{n+p} - m_n \leqslant \frac{1}{12(n-1)^2}.$$

Quel encadrement de γ en déduit-on en faisant tendre p vers l'infini ?

À l'aide de la valeur de m_{50} calculée à la question **5.**, quel encadrement de γ obtient-on finalement ?